375. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, VI

福原満洲雄(北大)

§1. 微分方程式

(1) $$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

ニ於テ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ハ共通ナ因子ヲ含マナイ y ノ整多項式デ、ソノ係数ハ $x=0$ デ正則ナ函数トシ、ソレヲ x, y ノ昇冪ニ整頓シテ書イタモノヲ

$$P(x,y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots\cdots+a_p(x)y^p$$

$$Q(x,y)=b_0(x)+b_1(x)y+\cdots\cdots+b_q(x)y^q$$

$$a_j(x)=a_j x^{m_j}+\cdots\cdots \qquad (a_j\neq 0)$$

$$b_k(x)=b_k x^{n_k}+\cdots\cdots \qquad (b_k\neq 0)$$

トスル。

$$m_j-jp \qquad (j=0,1,\cdots\cdots,p)$$

ノ中ニ最小ノモノガ少クトモ二ツアル場合ニ ρ ヲ P-order,

$$n_k-(k+1)\rho \quad (k=0,1,\cdots\cdots,q)$$

ノ中ニ最小ノモノガ少クトモ二ツアル場合ニ ρ ヲ Q-order, 此等 ($p+q+2$) 個ノ数ノ中ニ最小ノモノガ少クトモ二ツアル場合ニ ρ ヲ R-order ト名ヅケ, (IV) ニ於テ ρ ガ P-order デモ, Q-order デモ, R-order デモナイ時ヲ調ベタ, 次ニ (V) デ ρ ガ Q-order デモ R-order デモナイ P-order デアル場合ヲ調ベテ, ソ

ノ様ナ order ノ存在ハ大勢ニ影響ガナイコトヲ確メタ、ソレニ較ベルトP-order デモ R-order デモナイQ-order ニ於ケル様子ヲ調ベルコトハ稍ヽ面倒デアル。以下コノ場合ニツイテ簡単ニ述ベヨウ。

§2. ρヲ P-order デモ, R-order デモナイ Q-order デアルトスル。

$$\min\{m_j - j\rho\} = m_\alpha - \alpha\rho$$
$$\min\{n_k - (k+1)\rho\} = n_\beta - (\beta+1)\rho,$$
$$n_{\beta'} - (\beta'+1)\rho, \cdots\cdots$$

トスル。αハ唯一ツ, $\beta, \beta', \cdots\cdots$ハ少クトモニツアリ,

$$\sigma = \beta - \alpha + 1, \quad m_\alpha - n_\beta = \mu$$

ト置ケバ $\mu + \sigma\rho < 0$ デアル。故ニ $y = x^{-\rho} z$ ト置イテ得ラレルzノ方程式

$$(2) \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)}$$

ノ主ナ部分カラ成ル方程式ハ

$$(3) \quad x\frac{dz}{dx} = x^{\mu+\sigma\rho}\frac{a_\alpha z^\alpha}{\sum' b_k z^k}$$

デアル、但シ$\sum'$ハ $k = \beta, \beta', \cdots\cdots$ ニ関スル和ヲ表ハス、此ノ方程式ノ形カラ次ノ五ツノ場合ヲ区別スル必要ガアル。

1° 総テノ βガ $\alpha - 1$ ヨリ大キイ.

2° 総テノ βガ $\alpha - 1$ ヨリ小サイ。

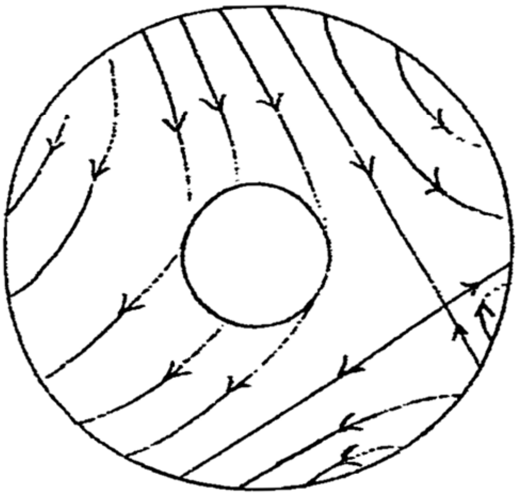
3° $\alpha - 1$ ニ等シイβガ存在シ、其ノ他ノ βハ $\alpha - 1$ ヨ

り大キイ。

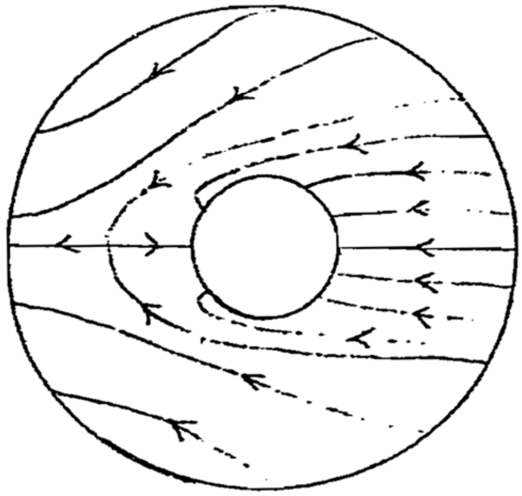
4° $\alpha-1$ ニ等シイ β ガ存在シ、其他ノ β ハ $\alpha-1$ ヨリ小サイ。

5° $\alpha-1$ ヨリ大キナ β モ小サイ β モ共ニ存在スル。

1° ト 2°, 3° ト 4° ハ α ヲ $\frac{1}{\alpha}$ デ置換ヘルコトニヨリ一方カラ他ヘ移ルカラ本質的ニ異ルノハ三ツデアル。

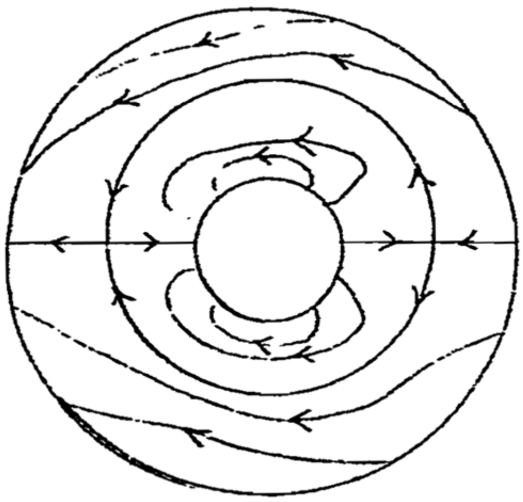


第 1 圖



第 2 圖

正ノ数 ε ガ十分ニ小サケレバ $\rho\pm\varepsilon$ ハ P−order デモ, Q−order デモ, R−order デモナイカラ (IV) デ述ベタ所ニヨリ、ソコニ於ケル型ヲ決定スルコトガ出來ル。ソノ結果



第 3 圖

1° $\rho\pm\varepsilon$ ニ於テ B' 型

3° $\rho+\varepsilon$ ニ於テ B' 型, $\rho-\varepsilon$ ニ於テハ A 型又ハ A' 型,

但シ $R(a_\alpha/b_{\alpha-1})\neq 0$ トスル。

$5°$ $\rho+\varepsilon$ ニ於テ B'型，$\rho-\varepsilon$ ニ於テ B型.

之ノ描ク曲線ガ第1圖ノヤウニナレバ $1°$ノ場合，第2図ノヤウニナレバ $3°$ ノ場合，第3図ノヤウニナレバ $5°$ ノ場合デアル、矢ハ x ノ減少スル方向ヲ示スモノデ，第2図ハ $\rho-\varepsilon$ ニ於テ A型トナル場合ヲ示シ、ソコニ於ケル矢ノ方向ヲ逆ニスレバ $\rho-\varepsilon$ ニ於テ A'型ノ場合ヲ得ル。

§3. (2), (3) ヲ比較スルニハ方程式

$$\text{(4)} \quad \sum{}' b_k z^k = 0$$

ノ根ノ近傍ヲ除カナケレバナラナイ、ソノ一ツノ根ヲ z_1 トシタトキ、z_1 ノ近傍ヲ調ベルニハ $u=z-z_1$ ナル置換ヲ行ッテ得ラレル u ノ方程式ガ更ニ負ノ Q-order ρ ヲ持テバ $u=x^{-\rho}v$ ナル置換ヲ行ヒ v ニ関スル方程式ヲ作レバ、ソレニ對シテ §2 ノ結果ガソノママ使ヘル、而モソノ時ニ起リ得ル場合ハ $1°$ ダケデアル。(4) ニ相當スル v ノ方程式

$$\text{(5)} \quad \sum{}' \bar{b}_k v^k = 0$$

ガ0デナイ根 v_1 ヲ持テバ $w=v-v_1$ ト置ク、コノヤウニシテ進ンデ行ケバ最後ニ達スル方程式

$$x\frac{dY}{dx}=x^{-\lambda}\frac{P_2(x,Y)}{Q_2(x,Y)} \qquad (\lambda>0)$$

ニ於テハ

$P_2(0,0)\neq 0,$

$$Q_2(x, Y) = B_\nu(x)Y^\nu + B_{\nu+1}(x)Y^{\nu+1} + \cdots\cdots$$
$$B_\nu(0) \neq 0$$

トナル、ソコデ $Y^{\nu+1} = Z$ ト置キ、Z ノ方程式ヲ作レバ $Z=0$ ノ近傍デ比較定理ガ使ヘルカラ（右辺ガ Z ノ多價函數トナルコトハ邪魔ニナラナイ）$Z=0$ ノ近傍ニ於ケル解ノ様子ガ分ル。コノヤウニシテ P-order デモ R-order デモナイ Q-order ハ片ガ附ク。

以上ノ考察カラ分ル重要ナ事柄ハ

「ρ ガ R-order デナケレバ，初期條件

$$x_0^{-\rho+\varepsilon} < |y(x_0)| < x_0^{-\rho-\varepsilon} \qquad (\varepsilon, x_0 > 0)$$

ヲ満足スル (1) ノ解ハ必ズ $0, x_0$ ノ間ノ或 x デ

$$|y(x)| = x^{-\rho+\varepsilon} \quad 又ハ \quad |y(x)| = x^{-\rho-\varepsilon}$$

トナル」ト云フコトデアル。故ニ「勝手ナ正ノ數 ε ニ對シテ $x \to +0$ ノトキ

$$(6) \quad x^{-\rho+\varepsilon} < |y(x)| < x^{-\rho-\varepsilon}$$

ガ成立スルナラバ ρ ハ R-order デナケレバナラナイ」

併シ「(1) ノ勝手ナ解 $y(x)$ ヲ取ッタトキ (6) ガ成立スルヤウナ ρ ガ存在スル」ト言ヘルデアラウカ？

ソレガ證明サレタラ彼岸ハ近イノデアルガ、今マデノ結果ダケデハ未ダ十分デナイ、差當ッテコレヲ目標トシテ進マウ。